Prof. Dr. C.W. Cryer
Dr. A. Klawonn SS 1999

Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen"

Übungsblatt 1, Abgabe:Do. 22.4.1999, 13.00 Uhr

Aufgabe 1: (3 Punkte)
Beweisen Sie folgenden Satz: Ist ϕ eine im Intervall J differenzierbare Funktion und $\phi'(x) \neq 0$ in J, dann besitzt ϕ eine differenzierbare Umkehrfunktion ψ und

$$\psi'(y) = \frac{1}{\phi'(\psi(y))}.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Bestimmen Sie eine Lösung $y(x)$ der Gleichung

$$(x^2 - x)y' = y^2 + y \tag{1}$$

mit $y(1) = 1$, indem Sie (1) als Gleichung mit getrennten Veränderlichen schreiben.

Aufgabe 3: (3 Punkte)
$y(x)$ sei eine Lösung der DGL

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Sei $u(s) = \beta[y(\gamma s + \alpha) + \phi(s)]$ wo α und β, γ Konstanten sind und ϕ eine gegebene Funktion ist. Bestimmen Sie eine DGL für $u(s)$.

Aufgabe 4: (6 Punkte)
Zur Modellierung des Wachstums einer Fischpopulation wird das Beverton-Holt Modell oft benutzt:

$$\frac{dN}{dt} = N\frac{r}{\alpha + N} \tag{2}$$

wobei N die Anzahl der Fische zum Zeitpunkt t ist und r und α positive Konstanten sind.

a) Zeigen Sie, daß $N(t)$ eine Lösung von (2) ist, falls

$$N(t)^\alpha e^{N(t)} = Pe^{rt} \tag{3}$$

gilt. Dabei ist P eine Konstante.

b) Zeigen Sie, daß (3) eine eindeutige Lösung $N(t)$ hat. (Wenden Sie den Satz über implizite Funktionen an.)

c) Benutzen Sie die "Methode der getrennten Veränderlichen" um (3) herzuleiten.

d) Eine Population besteht aus zwei Teilen, jung und alt. Die Anzahl der Mitglieder in den Teilen werden mit $u_1(t)$ bzw. $u_2(t)$ bezeichnet, wobei t die Zeit in Jahren ist. Es werden folgende Voraussetzungen gemacht:

- Die prozentualen Geburtenraten für jung und alt sind α_1 und α_2. Die prozentualen Sterberaten für jung und alt sind β_1 und β_2. Jedes Jahr altern prozentual γ Jungtiere.
- Erstellen Sie Differentialgleichungen für $u_1(t)$ und $u_2(t)$, die diese Annahmen beinhalten.

Prof. Dr. C.W. Cryer
Dr. A. Klawonn SS 1999

Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen"

Übungsblatt 2, Abgabe:Do. 29.4.1999, 13.00 Uhr

Aufgabe 5: (2 Punkte)

a) Formulieren Sie die Regel von de l'Hospital.

b) Bestimmen Sie
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}.$$

Aufgabe 6: (8 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $xy' + y^2 = 1$

b) $(x^2 - y^2) + 2xyy' = 0$

c) $-y' = x + y$

d) $2x + 6y - 18 = (9x + 2y + 19)y'$ (Es genügt die Lösung in impliziter Form.)

Aufgabe 7: (4 Punkte)
Sei
$$2x^2y' = (x-1)(y^2 - x^2) + 2xy. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, daß $y_1(x) = x$ eine Lösung dieser Gleichung ist.

b) Zeigen Sie, daß $w := y - y_1$ die Bernoulli Gleichung
$$2x^2w' - 2x^2w + (1-x)w^2 = 0 \tag{2}$$
erfüllt.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (2).

Aufgabe 8: (2 Punkte)
Betrachten Sie die Gleichung
$$y' = y^2(y-1).$$

a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld.

b) Bestimmen Sie die Menge aller Punkte (ξ, η), für welche das Anfangswertproblem nicht lokal eindeutig lösbar ist, ohne die Lösungen explizit zu berechnen.

Prof. Dr. C.W. Cryer
Dr. A. Klawonn SS 1999

Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen"

Übungsblatt 3, Abgabe:Do. 6.5.1999, 13.00 Uhr

Aufgabe 9: (4 Punkte)
Sei
$$f_n(x) := nxe^{-\frac{1}{2}nx^2}, -1 \leq x \leq 1, n \in .$$
Bestimmen Sie, ob die Folge $\{f_n\}$ gleichmäßig konvergent ist.

Aufgabe 10: (4 Punkte)
Sei φ die Menge aller reellen Folgen $x = \{x_n\}$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^{1/2} < \infty$. Für $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ und $\lambda \in$ sei: $x + y := \{x_n + y_n\}$, $\lambda x := \{\lambda x_n\}$.
Zeigen Sie:

a) φ ist ein reeller Vektorraum.

b)
$$\rho(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{1/2}$$
erfüllt die Bedingungen für eine Metrik

i) $\rho(x, y) \geq 0$

ii) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

iv) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

c) $d(x) := \rho(x, 0)^{1/2}$ ist keine Norm.

Aufgabe 11: (4 Punkte)
Die Entwicklung des HIV Virus im Körper ist sehr erfolgreich durch das folgende Modell modelliert worden:
$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= s + pT(1 - \frac{T}{T_{max}}) - d_T T - kVT \\
\frac{dT^*}{dt} &= kVT - \delta T^* \\
\frac{dV}{dt} &= N\delta T^* - cV,
\end{aligned}$$
wobei $T(t)$ die Anzahl nicht infizierter Zellen ist, $T^*(t)$ die Anzahl infizierter Zellen (die neue Viren produzieren) und $V(t)$ die Anzahl Viren ist. Die Parameter $s, p, T_{max}, d_T, k, \delta, N$ und c sind positive Konstanten.

Sei $\{T_0, T_0^*, V_0\}$ eine stationäre Lösung.

a) Zeigen Sie, daß $T_0 = \dfrac{c}{Nk}$

b) Bestimmen Sie T_0^* und V_0.

Aufgabe 12: (4 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen folgender Gleichungen:

a) $(1+y)y' = x^2(1-y)$

b) $(x^2+y^2)y' = xy$

c) $y' + y^2 = x^{-4}$
(Hinweis: $y = (x+1)/x^2$ ist eine Lösung)

Aufgabe 13: (4 Punkte)
Sei $D(J)$ die Menge aller reellen, stetigen Funktionen auf $J := [0, a]$ mit der Norm

$$||f|| = \max_{x \in J} |f(x)e^{-ax}|.$$

Der Opterator $T : D(J) \to D(J)$ sei definiert durch

$$(Tf)(x) := \int_0^x t f(t) dt.$$

Bestimmen Sie $||T||$.

Prof. Dr. C.W. Cryer SS 1999
Dr. A. Klawonn

Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen"

Übungsblatt 4, Abgabe: **Mi. 12.5.99**, 13.00 Uhr

Aufgabe 14: (4 Punkte)
Sei $X = C(J)$, die Menge aller stetigen reellen Funktionen, die auf $J := [0, 1]$ erklärt sind. Sei

$$||u||_1 = \sup_{x \in J} |u(x)e^{-\alpha x}|$$

mit $\alpha \in$.

Zeigen Sie, daß

a) $||\cdot||_1$ eine Norm ist.

b) Mit der Norm $||\cdot||_1$ ist X vollständig.

Aufgabe 15: (4 Punkte)
Die Funktion $k(x, t, z)$ sei für $0 \leq t \leq x \leq a$, $-\infty < z < \infty$ stetig und genüge einer Lipschitzbedingung in z

$$|k(x, t, z) - k(x, t, \bar{z})| \leq L|z - \bar{z}|,$$

die Funktion $g(x)$ sei für $0 \leq x \leq a$ stetig. Man zeige durch Anwendung des Fixpunktsatzes, daß die "Volterra-Integralgleichung"

$$u(x) = g(x) + \int_0^x k(x, t, u(t))dt$$

genau eine in $0 \leq x \leq a$ stetige Lösung besitzt.

Aufgabe 16: (4 Punkte)
Ein einfaches Modell zur Beschreibung von Sprints in der Leichtathletik (Länge der Laufstrecke etwa bis 290 m) ist durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= f - \sigma v. \end{aligned}$$

Dabei ist $x = x(t)$ der Abstand zum Startpunkt des Rennens und $v = v(t)$ die Geschwindigkeit jeweils zum Zeitpunkt t. Es gilt:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \qquad \text{(Startpunkt)} \\ v(0) &= 0 \qquad \text{(Startgeschwindigkeit)} \end{aligned}$$

Die Parameter σ und f sind positive Konstanten.

a) Bestimmen Sie $x(t)$ und $v(t)$.

b) Zeigen Sie, daß

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} v(t) &= f/\sigma \\ \lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{t} &= f/\sigma. \end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie die Laufzeit für den 100 m Lauf mit folgenden Daten:

$$\begin{aligned} \sigma &= 0,581 \\ f &= 7,10. \end{aligned}$$

Aufgabe 17: (4 Punkte)
Bestimmen Sie, mit Beweis, ob folgende Funktionen Lipschitz stetig sind. Falls ja, geben Sie eine Abschätzung für L an:

a) $\sin(x),\ -\pi \le x \le \pi.$

b) $e^x,\ 0 \le x \le \infty.$

c) $x \log x,\ 0 \le x \le 1.$

Prof. Dr. C.W. Cryer
Dr. A. Klawonn SS 1999

Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen"

Übungsblatt 5, Abgabe: **Do. 20.5.99**, 13.00 Uhr

Aufgabe 18: (3 Punkte)
Es sei $f(x,y) \in C^2(\mathbf{R}^2)$ und $y(x) = \int_0^x f(t,y(t))dt$, $0 \leq x \leq 1$.

a) Zeigen Sie, daß das Integral

$$\int_0^1 y(x)dx$$

existiert und daß

$$\int_0^1 y(x)dx = \int_0^1 (1-x)f(x,y(x))dx.$$

b) Zeigen Sie, daß $y(x) \in C^3(0,1)$.

Aufgabe 19: (6 Punkte)
Die Funktion $f(x,y)$ sei im Streifen $S = J \times \mathbf{R}$, $J = [0,a]$, stetig und genüge der Bedingung

$$|f(x,y) - f(x,z)| \leq \frac{k}{x}|y-z| \text{ für } 0 < x \leq a \text{ und } y,z \in \mathbf{R}$$

mit $k < 1$. Man zeige, daß das Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y) \text{ in } J, y(0) = \eta$$

genau eine Lösung besitzt, und daß sich diese durch sukzessive Approximation berechnen läßt. Die obige Bedingung wurde von Rosenblatt (1909) angegeben.

Benutzen Sie als Banachraum $C(J)$, den Raum aller stetigen Funktionen auf J, mit endlicher Norm

$$||u|| := \sup_{x \in (0,a]} \left(\frac{|u(x)|}{x} \right).$$

Aufgabe 20: (3 Punkte)
Konstruieren Sie die Picard-Iterationen y_n (vgl. Walter, S. 58, (6)) für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= 2x(y+1) \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß die y_n gegen die Lösung

$$y(x) = e^{x^2} - 1$$

konvergieren.

Aufgabe 21: (3 Punkte)
Zeigen Sie, daß die Lösung y(x) des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= x^2 + e^{-y^2} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

für $x \in J := [0, 1/2]$ existiert und in J der Ungleichung $|y(x)| \leq 1$ genügt.

Prof. Dr. C.W. Cryer
Dr. A. Klawonn

Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen"

Übungsblatt 6, Abgabe: **Mi. 2.6.99**, 13.00 Uhr

Aufgabe 22: (3 Punkte)
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. A erfüllt die Bedingung KT, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $\bigcup_{i \in I} U_i$ von A eine endliche Überdeckung $\bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}$ von A gibt. A erfüllt die Bedingung KA, wenn jede Folge $\{x_n\}$ aus A eine konvergente Teilfolge besitzt mit Grenzwert in A.

Zeigen Sie, $KT \Rightarrow KA$, wobei Sie folgendes benutzen dürfen: Jede beschränkte Folge $\{x_n\}$ in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Aufgabe 23: (3 Punkte)
Man löse das Anfangsproblem ($n = 3$)

$$y' = \begin{pmatrix} y_2 \quad y_3 \\ -y_1 \quad y_3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch Iteration. Wie lautet die k-te Approximation $y_k(x)$, wenn man von $y_0(x) = y(0)$ ausgeht?

Aufgabe 24: (5 Punkte)
Ein Skifahrer fährt "Schuß" auf einem Hang mit Hangwinkel α. Es gilt (Newtonsche Gesetze):

$$ma = mg \sin\alpha - \mu mg \cos\alpha - D$$

mit

$$D = \frac{1}{2}\rho A C_D v^2$$

und

$$m = \text{ Masse.}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $s(t) = v(t) = 0$.

a) Formulieren Sie diese Anfangswertaufgabe als eine Anfangswertaufgabe für ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix}' = \underline{f}(s, v)\ , \ \begin{pmatrix} s \\ V \end{pmatrix}(0) = 0 \tag{1}$$

b) Bestimmen Sie eine analytische Lösung der Gleichung (1).

c) Beweisen Sie, daß die Anfangswertaufgabe (1) genau eine Lösung besitzt, und das diese Lösung für $t \in [0, \infty)$ existiert.

Aufgabe 25: (4 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz stetige und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, daß das System

$$\begin{aligned} x' &= g(x) \\ y' &= f(x)y \end{aligned}$$

für einen gegebenen Anfangswert auf einem beliebigen Intervall höchstens eine Lösung hat.

<u>Hinweis:</u> Benutzen Sie das Gronwallsche Lemma, vgl. Walter, §29 VI, S. 278 (6. Auflage).

Prof. Dr. C.W. Cryer
Dr. A. Klawonn SS 1999

Übungen zur Vorlesung “Gewöhnliche Differentialgleichungen”

Übungsblatt 7, Abgabe: **Do. 10.6.99**, 13.00 Uhr

Aufgabe 26: (4 Punkte)
Man zeige, daß für die Differentialgleichung mit getrennten Variablen, genauer für das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x)g(y), \qquad y(\xi) = \eta,$$

die Ableitungen der Lösung $y(x;\xi,\eta)$ im Fall $g(\eta) \neq 0$ durch

$$\begin{aligned} y_\xi(x;\xi,\eta) &= -f(\xi)g(y(x;\xi,\eta)), \\ y_\eta(x;\xi,\eta) &= g(y(x;\xi,\eta))/g(\eta) \end{aligned}$$

gegeben sind. Dabei ist nur Stetigkeit von f und g vorausgesetzt. Anleitung: Man differenziere die Identität

$$\int_\eta^y \frac{ds}{g(s)} = \int_\xi^x f(t)dt.$$

Aufgabe 27: (3 Punkte)
Die Funktion f genüge im Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ einer lokalen Lipschitzbedingung in y. Man zeige: f genügt auf kompakten Teilmengen von D einer Lipschitzbedingung in y.

Aufgabe 28: (4 Punkte)
Das linearisierte mathematische Pendel:

a) Bestimme die Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$\begin{aligned} &\ddot{\phi} + a\phi = 0, \\ &\phi(0) = \eta_0, \\ &\dot{\phi}(0) = \eta_1, \\ &a = g/l > 0, \text{ mit } l = \text{ Länge des Pendels, } g = 9{,}81 m/s^2 \text{ die Schwerkraft.} \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei bedeuten $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$ und $\ddot{\phi} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$ die Ableitungen nach der Zeit t (Sekunde), wobei ϕ den Winkel zwischen der Senkrechten und der Pendelstange bezeichnet (rad).

b) Man baut eine Pendeluhr, so daß das Pendel einmal pro Sekunde hin und zurück pendelt. Wie lang muß das Pendel sein?

Aufgabe 29: (4 Punkte)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und

$$f : I \times I \to \mathbb{R}\,,\ (x,y) \to f(x,y),$$

eine stetige, nach der zweiten Variablen stetig partiell differenzierbare Funktion. Man zeige, daß die durch

$$F(y) := \int_a^y f(x,y)dx$$

definierte Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und daß für alle $y \in I$ gilt

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y) = f(y, y) + \int_a^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx.$$

Anleitung: Man beweise, daß die durch

$$G(y, z) := \int_a^z f(x, y)dx$$

definierte Funktion $G : I \times I \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar ist und wende die Kettenregel an.

Prof. Dr. C.W. Cryer
Dr. A. Klawonn

Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen"

Übungsblatt 8, Abgabe: **Do. 17.6.99**, 13.00 Uhr

Aufgabe 30: (4 Punkte)
u erfülle die Differentialgleichung n-ter Ordnung:

$$p_0(t)\frac{d^n u}{dt^n} + \cdots + p_n(t)u = 0,$$

d.h. $\sum_{k=0}^{n} p_k(t)u^{(n-k)}(t) = 0$.

a) Sei $\mathbf{v}(t) := (u(t), u^{(1)}(t), \cdots, u^{(n-1)}(t))^T \in \mathbb{R}^n$
Zeigen Sie, daß $\mathbf{v}$ eine Gleichung der Gestalt

$$\mathbf{v}'(t) = A(t)\mathbf{v}(t) \tag{1}$$

erfüllt und geben die Matrix $A(t)$ explizit an.

b) Sei $W(t)$ die Wronski-Determinante eines Lösungssystems $Y(t)$ von (1). Bestimmen Sie $W(t)$.

Aufgabe 31: (4 Punkte)
Sei $\phi(t; a)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} &\phi''(t) + a\phi(t) = 0, t > 0 \\ &\phi(0) = 1, \phi'(0) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Sei $\phi_a(t) := \dfrac{\partial}{\partial a}\phi(t; a)$.
Zeigen Sie, daß

$$\begin{aligned} &\phi_a''(t) + a\phi_a(t) = -\phi(t; a), t \geq 0 \\ &\phi_a(0) = 0, \phi_a'(0) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

indem Sie

a) $\phi(t; a)$ explizit berechnen und die Bedingungen (3) überprüfen.

b) Das Problem (2) in ein Problem für Differentialgleichungen erster Ordnung umwandeln und danach den Satz aus Walter S. 131 anwenden.

Aufgabe 32: (4 Punkte)
$f(x, y)$ sei Lipschitz stetig auf $J \times \mathbb{R}$, $J := [a, b]$.
Es gilt: $u, v \in C^1(J)$,

$$\begin{aligned} u'(x) &= f(x, u(x)),\ x \in J, \\ v'(x) &\leq f(x, v(x)),\ x \in J, \\ v(a) &\leq u(a). \end{aligned}$$

Dann folgt:

$$v(x) \leq u(x),\ x \in J.$$

Hinweis: Man betrachte die Lösungen u_n der "gestörten" Gleichung

$$\begin{aligned} u_n'(x) &= f(x, u_n(x)) + \frac{1}{n},\ x \in J \\ u_n(a) &= u(a),\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

und zeigt, daß $v \leq u_n,\ x \in J$. Danach eine Anwendung von Satz VI, Walter S. 121.

Aufgabe 33: (4 Punkte)
Lösen Sie folgendes System von Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{t(u_1+u_2)+u_1-u_2}{t-1} \\ u_1+u_2 \end{pmatrix}$$

mit $u_i = u_i(t), i = 1, 2$.

Hinweis: Benutzen Sie das Verfahren von d'Alembert (Walter, S. 141).

Prof. Dr. C.W. Cryer
Dr. A. Klawonn

Übungen zur Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen"

Übungsblatt 9, Abgabe: **Do. 24.6.99**, 13.00 Uhr

Dieser Zettel dient als Vorbereitung auf die Klausur.

Aufgabe 34: (15 Punkte)
Man bestimme sämtliche Lösungen des Systems

$$
\begin{aligned}
x' &= (3t-1)x-(1-t)y+te^{t^2}\\
y' &= -(t+2)x+(t-2)y-e^{t^2}
\end{aligned}
$$

Anleitung. Das homogene System hat eine Lösung der Form $(x(t),y(t))=(\phi(t),-\phi(t))$.

Aufgabe 35: (20 Punkte)
Geben Sie ein Fundamentalsystem an für das System

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1+\tfrac{1}{2}y_2-\tfrac{1}{2}y_3+1\\
y_2' &= \tfrac{3}{2}y_2-\tfrac{1}{2}y_3-2\\
y_3' &= \tfrac{1}{2}y_2+\tfrac{1}{2}y_3+x
\end{aligned}
\tag{1}
$$

und lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y_1(0)=0,\ y_2(0)=1,\ y_3(0)=-1.$$

Aufgabe 36: (15 Punkte)
Es gilt:

$$ag''+bg'+cg=0$$

mit positiven Konstanten a,b und c und $g\in C^{(2)}[0,\infty)$. Zeigen Sie, daß $g(t)\to 0$ für $t\to\infty$.

Aufgabe 37: (15 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$y'(x)=\frac{x^2+2xy-y^2}{x^2-2xy-y^2},\ y(0)=1,$$

[Zur Kontrolle: $y(1)=1$]

Aufgabe 38: (15 Punkte)
Richtige Antwort: + Punkte
Falsche Antwort: - Punkte
Keine Antwort: 0 Punkte

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig sind. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung. (Vorsicht!)

1. $J:=[0,1]$, $f\in C^1(D)$, $D=J\times\mathbb{R}$. Dann hat die Anfangswertaufgabe

   $$y'=f(x,y)\ ,\ y(0)=0$$

   eine Lösung $y(x)$, die auf J definiert ist.

2. Es sei $x \in C^2[0,1]$, mit $x''(s) \geq 0$, $s \in [0,1]$. Dann gilt: $x(s) \geq \dfrac{s^2}{4}$, $s \in [0,1]$.

3. Es sei $n \geq 1$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda := spur(A)/n$, $u := (1,1,1,...,1)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $x(t) := e^{\lambda t}u$ eine Lösung der Gleichung $x'(t) = Ax$.

Aufgabe 39: (20 Punkte)
Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= N(1-(N-c)^2)\ ,\ 0 \leq c < 1 \\ N(0) &= 1 \end{aligned}$$

a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld.

b) Bestimmen Sie die Ruhepunkte.

c) Geben Sie eine lineare Gleichung für $\frac{\partial N}{\partial c}$ an.

d) Bestimmen Sie die analytische Lösung für $c = 0$.